Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Ульяновский государственный технический университет

Информационно-статистическая теория измерений

Методические указания к лабораторно-практическому комплексу

Ульяновск 2004

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Ульяновский государственный технический университет

Информационно-статистическая теория измерений

Методические указания
к лабораторно-практическому комплексу

Составители Т. А. Фёдоров
Л. В. Федотов

Ульяновск 2004

УДК 621.317.08(076)
ББК 30.10 я7
И74

Рецензент кандидат технических наук, доцент УлГТУ А. Ю. Дятлов
Одобрено секцией методических пособий научно-методического совета университета

И74 **Информационно-статистическая теория измерений** : методические указания к лабораторно-практическому комплексу / сост.: Т. А. Фёдоров, Л. В. Федотов. – Ульяновск : УлГТУ, 2004. – 36 с.

Указания составлены в соответствии с программой курса «Информационно-статистическая теория измерений» и предназначены для студентов дневного отделения Ульяновского государственного технического университета, обучающихся по специальности 190300 и направления 551500.
Работа подготовлена на кафедре «Измерительные-вычислительные комплексы».

УДК 621.317.08(076)
ББК 30.10 я7

УДК 621.317.08(076)
ББК 30.10 я7

И74

Рецензент кандидат технических наук, доцент УлГТУ А. Ю. Дятлов
Одобрено секцией методических пособий научно-методического совета университета

Информационно-статистическая теория измерений : методические
И74 указания к лабораторно-практическому комплексу / сост.: Т. А. Фёдоров,
Л. В. Федотов. – Ульяновск : УлГТУ, 2004. – 36 с.

Указания составлены в соответствии с программой курса «Информационно-статистическая теория измерений» и предназначены для студентов дневного отделения Ульяновского государственного технического университета, обучающихся по специальности 190300 и направления 551500.

Работа подготовлена на кафедре «Измерительные-вычислительные комплексы».

УДК 621.317.08(076)

ББК 30.10 я7

ПРЕДИСЛОВИЕ

Для управления, контроля и испытания сложных многомерных систем необходима информация об их состоянии. На первый план выходит задача определения численных значений параметров или обобщённых характеристик объекта во времени, при условии действия помех, искажающих результаты измерения. Один из путей подавления помех основан на дополнительной обработке всей совокупности измерительной информации с использованием сведений о вероятностных характеристиках параметров объекта и погрешностей, вызываемых действием помех.

Если во время прочтения у читателя возникнут вопросы, а также он захочет углубить свои знания в данной области рекомендуется обратиться к литературе [1-5] или к конспекту лекций.

1. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Для характеристики частоты появления различных значений случайной величины X (в нашем случае погрешности прибора или результата измерения с учётом и её систематической составляющей) теория вероятностей предлагает пользоваться указанием закона распределения вероятностей различных значений этой величины. При этом различают два вида описания законов распределения: интегральный и дифференциальный.

Интегральным законом, или *функцией распределения вероятностей* $F(X)$ случайной величины X, называют функцию, значение которой для каждого x является вероятностью события, заключающегося в том, что случайная величина X принимает значения, меньшие x, т. е. функцию $F(x) = P[X < x]$. Это неубывающая функция x, изменяющаяся от $F(-\infty) = 0$ до $F(+\infty) = 1$. Она существует для всех случайных величин, как дискретных, так и непрерывных.

Для случайной величины с непрерывной и дифференцируемой функцией распределения $F(x)$ можно найти *дифференциальный закон распределения* вероятностей, выражаемый как производная от $F(x)$, т. е. как $p(x) = F'(x)$. Эта зависимость называется кривой *плотности распределения вероятностей.* Она всегда неотрицательна и подчинена условию нормирования в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1,$$

что непосредственно следует из свойств интегральной функции распределения $F(x)$.

Примеры законов распределения.

Одним из простейших законов распределения является *распределение Коши,* плотность вероятностей для которого

$$p(x)=\frac{a}{\pi(a^2+x^2)}=\frac{1}{a\pi(1+(x/a)^2)}$$

Это распределение (рис. 1.1, а) близко к предельно пологому, так как при более пологих, чем $1/x^{1+\alpha}$ (где α — сколь угодно малая положительная величина), спадах площадь под кривой бесконечна и не может быть приравнена единице, т. е. не выполняется условие нормирования, и такие кривые не могут описывать плотность распределения вероятностей.

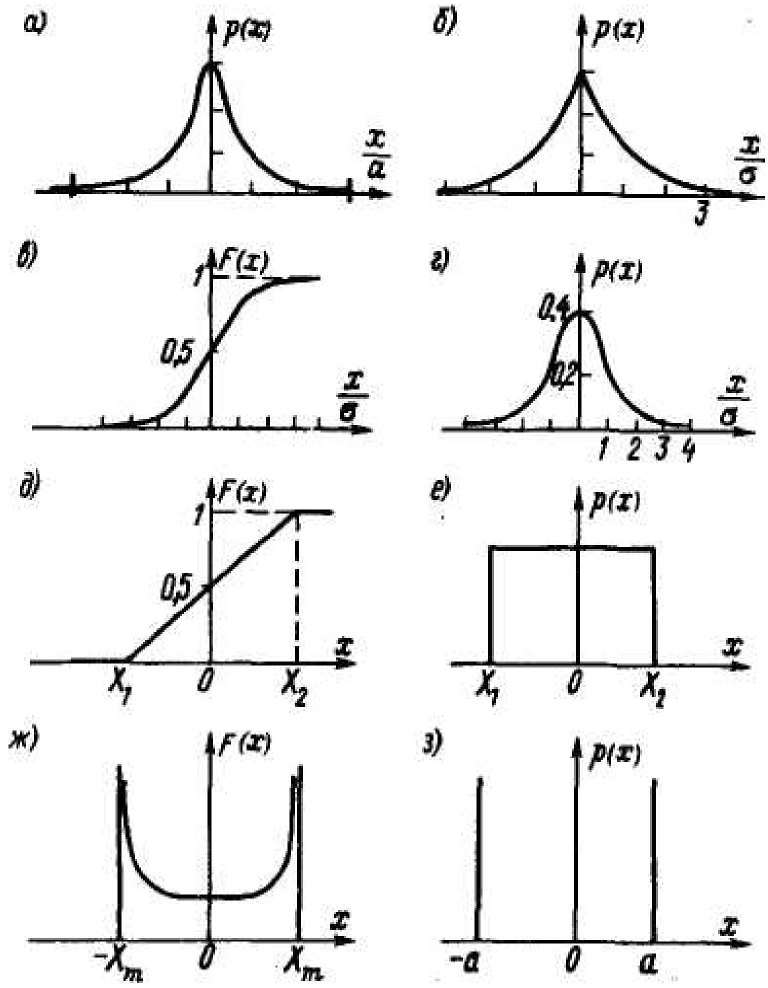

Рис.1.1

Другим законом распределения, с более быстроспадающей плотностью при отклонении от центра распределения, является *распределение Лапласа* (рис. 1.1,б) с плотностью

$$p(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},$$

т. е. двустороннее экспоненциальное распределение.

Наиболее часто используемым в теории вероятностей законом распределения является *нормальный* (*распределение Гаусса*), плотность вероятности которого описывается выражением

$$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2\right],$$

т. е. спадает по мере удаления от $x = 0$ ещё быстрее, чем при законе распределения Лапласа. Интегральный закон этого распределения показан на рис. 1.1,в , а кривая плотности — на рис. 1.1, г.

Если непрерывная случайная величина принимает значения лишь в пределах некоторого конечного интервала от X_1 до X_2 с постоянной плотностью вероятностей, то такой закон распределения называют *равномерным.* Его функция распределения (рис. 1.1, д) на участке от - ∞ до X_1 равна нулю, на участке от X_1 до X_2 линейно возрастает от 0 до 1, а на участке от X_2 до + ∞ равна 1. Плотность вероятностей такого распределения представлена на рис.1.1,е и записывается как

$$\begin{cases} p(x) = 1/(X_2 - X_1) = const \text{ при } X_1 < x < X_2 \\ p(x) = 0 \text{ при } x < X_1 \text{ и } x > X_2. \end{cases}$$

Распределение отсчётов синусоидально изменяющейся во времени величины $x = X_m \sin \omega t,$ если моменты этих отсчётов равномерно распределены во времени, называется *арксинусоидальным.* Его плотность описывается выражением

$$p(x) = 1\Big/\left(\pi\sqrt{X_m^2 - x^2}\right)$$

и представлена на рис. 1.1, ж.

Распределение, при котором встречаются с равными вероятностями только два дискретных значения случной величины + a и — a, называется *дискретным двузначным распределением.* Его плотность распределения вероятностей представлена на рис. 1.1,з и описывается аналитически:

$$p(x) = \frac{1}{2}\delta(x - a) + \frac{1}{2}\delta(x + a),$$

где δ — дельта-функция Дирака.

Понятие центра распределения

Координата центра распределения определяет положение случайной величины на числовой оси. Однако дать строгое определение этого понятия далеко не просто. Распределения погрешностей приборов или результатов измерений, как правило, являются симметричными. Поэтому применительно к распределениям вероятностей погрешностей центр распределения может быть определён как центр симметрии распределения.

Координата центра распределения может быть определена несколькими способами. Наиболее общим, а следовательно, и наиболее фундаментальным является определение центра из принципа симметрии, т. е. как такой точки на оси х, слева и справа от которой вероятности появления различных значений случайной величины равны между собой и составляют $P_1 = P_2 = 0{,}5$. Такое значение x называется *медианой*. На графике интегрального закона распределения (рис. 1.1, б или д) абсцисса медианы соответствует пересечению кривой уровня $F(x) = 0{,}5$.

Координата центра может быть определена и по-иному, а именно, как *центр тяжести распределения*, т. е. такая абсцисса $\overline{X}$, относительно которой опрокидывающий момент равен нулю, т. е.

$$\overline{X} = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx .$$

Центр распределения, найденный таким путём, носит название *математического ожидания.* При дискретных отсчётах x_t вычисление интеграла, определяющего математическое ожидание, заменяют вычислением *среднего арифметического*: $\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i / n$.

При симметричной кривой плотности распределения одной из возможных оценок центра распределения может служить абсцисса *моды* распределения, т. е. максимума плотности. Однако есть распределения, у которых не существует моды. Например, равномерное распределение (рис. 1.1, е). В этих случаях определение центра как моды распределения лишено смысла.

То же самое относится и к понятию математического ожидания.

У распределения Коши (рис. 1.1, а), а также у распределений, необходимых при вычислении погрешностей косвенных измерений, математического ожидания не существует, так как определяющий его интеграл расходится. **Понятие же центра распределения правомерно для всех распределений.**

При вероятностном описании погрешности координата центра распределения определяет значение систематической составляющей погрешности, т. е. вероятностное описание погрешностей включает в себя и указание её систематической составляющей.

На рис. 1.1 все распределения были показаны с координатой центра $X_ц = 0$. При $X_ц \neq 0$ несколько изменяется и аналитическое описание плотности распределения вероятностей. Так, плотность распределения Коши при $X_ц \neq 0$ будет

$$p(x) = \left[a\pi \left(1 + \left(\frac{x - X_ц}{a} \right)^2 \right) \right]^{-1},$$

а плотность распределения Гаусса

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x - X_ц)^2}{-2\delta^2} \right]$$

и т. д.

Если из всех наблюдавшихся значений погрешности вычесть систематическую составляющую, т. е. перенести начало координат в центр распределения, то такое распределение называется *центрированным.*

Моменты распределения. Для описания различных свойств распределений используют также параметры законов распределения, называемые *моментами*. Моменты, найденные без исключения систематической составляющей, называются *начальными,* а найденные для центрированных распределений, — *центральными.*

Первый начальный момент называется *математическим ожиданием* и был уже рассмотрен выше. Центральный момент *k*-го порядка для непрерывной случайной величины выражается интегралом

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - X_ц\right)^k p(x) dx$$

Второй центральный момент называется *дисперсией случайной величины* и относится к параметрам, характеризующим рассеяние отдельных ее значений от центра распределения:

$$\mu_2 = D = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - X_ц\right)^2 p(x) dx .$$

Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины и выражает как бы мощность рассеяния относительно постоянной составляющей. Поэтому для более наглядной характеристики самого рассеяния пользуются корнем квадратным из дисперсии, т. е. действующим значением рассеяния, которое называется *средним квадратическим отклонением* (сокращенно СКО) и имеет размерность самой случайной величины: $\sigma = \sqrt{D}$.

ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ. КРИТЕРИЙ СОГЛАСИЯ ПИРСОНА χ^2

Случайная величина *X*, которая служит для статистической проверки гипотезы, называется *критерием*. Иногда термином «критерий» обозначают не только случайную величину *X*, но и всё правило проверки в целом. При этом *X* называют статистикой критерия.

Проверка гипотезы состоит в том, что если наблюдаемое значение критерия принадлежит некоторому определённому множеству *S*, т. е. наступает событие $\{X \in S\}$, то основная гипотеза $H_о$ отвергается.

Множество S, такое, что при наступлении события $\{X \in S\}$ основная гипотеза $H_о$ отвергается, называется критическим множеством (для гипотезы $H_о$).

Событие $\{X \in S\}$, состоящее в том, что основная гипотеза H_0 отвергается, когда она является истинной, называется *ошибкой первого рода.*

Событие $\{X \in S\}$, состоящее в том, что основная гипотеза H_0 не отвергается, когда верна одна из альтернативных гипотез H_λ, называется *ошибкой второго рода*.

Вероятности P_I и P_{II} ошибок первого и второго рода вычисляются в предположениях о справедливости различных гипотез − основной H_0 и альтернативной H_λ соответственно:

$$P_I = P_{Ho}(X \in S),\ P_{II} = P_{H\lambda}\ (X \in S).$$

Вероятность ошибки второго рода, а также вероятность противоположного события связаны с конкретной альтернативной гипотезой Нл, т. е. могут зависеть от некоторого параметра X.

Функция P_{H_λ} параметра λ, равная вероятности отвергнуть гипотезу H_0, если верна гипотеза H_λ, называется *функцией мощности критерия*.

Правило статистической проверки гипотезы

1. Задаются малым числом $\alpha > 0$, называемым *уровнем значимости критерия*; обычно $\alpha = 0{,}05$; 0,01 или 0,001. Чем более опасными признаются ошибки первого рода, тем меньшее значение α должно быть выбрано.
2. Определяют критическое множество S из условия выполнения неравенства $P_I = P_{Ho}\,(X \in S) < \alpha$.
3. Условием $P_I < \alpha$ критическое множество определяется неоднозначно. Выбирают ту из возможностей, которая обеспечивает минимум вероятности ошибки второго рода, или, что то же самое, максимум мощности критерия.
4. Производят опыт и получают наблюдаемое значение критерия. Если при этом наступает событие $\{X \in S\}$, то основная гипотеза H_0 отвергается.

В противном случае считается, что H_0 не противоречит опытным данным.

Результат проверки гипотезы выражается словами:

Гипотеза H_0 отвергается (не отвергается) на уровне значимости α.

Критерии, которые служат для проверки гипотезы о законе распределения случайной величины, называются критериями согласия. Пусть основная гипотеза H_0 состоит в том, что функция распределения случайной величины ξ есть вполне определённая функция $F(x)$.

Разобьём числовую ось на r промежутков (разрядов):

$$(-\infty = a_0, a_1), [a_1, a_2), \ldots, [a_{r-1}, a_r = +\infty),$$

где $a_1 < a_2 < \ldots < a_{r-1}$.

При справедливой гипотезе H_0 i-му разряду $[a_{i-1}, a_i)$ соответствует вероятность

$$p_i = F(a_i) - F(a_{i-1}),\ i = 1,2,\ldots,r.$$

Из n выборочных значений $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ случайной величины ξ в r-й разряд попадает случайное число m_i значений $\sum_{i=1}^{r} m_i = n$. Тогда отношение m_i / n представляет собой частоту попадания выборочных значений в r-й разряд. Близость частот m_i/n к вероятности p_i свидетельствует в пользу основной гипотезы H_0, заметные различия отвергают гипотезу H_0.

Случайная величина

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{n}{p_i}\left(\frac{m_i}{n} - p_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{\left(m_i - np_i\right)^2}{np_i} \tag{1.1}$$

характеризует согласованность гипотезы H_0 с опытными данными. Критерий χ^2 применяется в соответствии с общим правилом статистической проверки гипотез. При этом наблюдаемое значение критерия вычисляется по формуле (1.1), критическое множество выбирается в виде полубесконечного интервала

(χ^2,+∞), где величина χ_α^2 находится с помощью таблицы П.1.1. Входами таблицы служат величина v=r-1 и уровень значимости α.

Если выполняется соотношение $\chi^2 > \chi_\alpha^2$, то говорят, что гипотеза H_0 отвергается на уровне значимости α. В противном случае она не противоречит опытным данным.

Замечание 1. Число выборочных значений m_i, i = 1, 2, ..., r в каждом разряде должно быть не менее 5 − 10. Если это условие не выполняется, рекомендуется объединять разряды.

Замечание 2. Критерий согласия χ^2 применим не только в случае, когда гипотетическая функция распределения $F(x)$ случайной величины ξ полностью определена. Если она зависит от l неизвестных параметров, т. е. имеет вид $F(x;a_1,a_2,\ldots,a_l)$, и параметры a_1, a_2,..., a_l; оцениваются по выборке методом максимального правдоподобия, то критерий согласия остаётся в силе, только входом в таблицу служит величина $v = r - l - 1$.

ЗАДАЧИ, РЕШАЕМЫЕ ПУТЁМ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ МНОГОКРАТНЫХ ОТСЧЁТОВ

Определение погрешности результата измерения по паспортным данным средства измерения (СИ), по существу, есть использование результатов поверки, проведённой полгода, год тому назад, к тому же в условиях, отличных от условий данного эксперимента. Поэтому, естественно, предпочтительнее путём статистической обработки проводимого эксперимента определить случайную погрешность в данный момент и в данных условиях, чем опираться на старые сведения.

При этом фактические погрешности, возникающие при эксперименте, могут быть как меньше, так и больше рассчитанных по паспортным данным СИ. Меньше потому, что для СИ нормируются пределы допускаемой погрешности, которые содержат запас на старение. Поэтому погрешность нового или только что прошедшего ремонт и регулировку прибора может быть от 0,8 до 0,4 от нормируемого предела. Погрешности измерительного канала или косвенного измерения могут быть меньше рассчитанных и потому, что отдельные составляющие при расчёте практически всегда тем или иным образом суммируются, а в действительности они могут вычитаться и взаимно компенсироваться.

Фактические погрешности могут оказаться и больше расчётных прежде всего потому, что погрешность СИ — это лишь обязательно присутствующая часть погрешности экспериментальных данных, к которой добавляются методические погрешности постановки эксперимента, погрешности, вызванные невоспроизводимостью (диффузностью) самого объекта исследования и особенно точностью задания варьируемых и стабилизируемых величин, и т. п. Поэтому при появлении возможности определения фактической погрешности экспериментальных данных она всякий раз безусловно должна быть использована.

Кроме определения случайной погрешности исходных данных, статистическая обработка позволяет их усреднить и найти как более точный усреднённый результат, так и его погрешность. Если эксперимент состоит в многократном измерении одного и того же значения измеряемой величины, то усреднённый результат — это центр распределения всех полученных отсчётов.

Таким образом, путём статистической обработки многократных отсчетов решаются три задачи:

оценивание случайной погрешности, т. е. области неопределенности исходных экспериментальных данных;

нахождение более точного усреднённого результата исследования;

оценивание погрешности этого усредненного результата, т. е. более узкой его области неопределённости.

Методы статистической обработки многократных отсчётов (при допущении о неизменности их закона распределения во всех точках модели исследуемого явления) оказываются сходными как в простейшем однофакторном, так и в сложных многофакторных экспериментах и сводятся к определению числовых оценок параметров соответствующих законов распределения (координаты центра, оценок ширины и формы).

РАССЕЯНИЕ ОЦЕНКИ КООРДИНАТЫ ЦЕНТРА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ.

Основной смысл усреднения многократных отсчётов заключается в том, что найденная усреднённая оценка координаты их центра имеет меньшую случайную погрешность, чем отдельные отсчёты, по которым она находится. При проведении n отсчётов при каждом t_j сами отсчёты по-прежнему будут располагаться случайным образом внутри той же полосы, однако линия их центров будет более устойчива.

Тем не менее, если все исследование (снимая по n отсчётов при каждом из t_j) провести ещё и ещё раз, то получаемые линии центров не совпадут между собой, а хотя и меньше, но будут случайным образом отличаться друг от друга. Таким образом, усреднение не устраняет полностью случайный характер усредненного результата, а лишь уменьшает в какое-то число раз ширину полосы его неопределённости.

Наиболее широко распространённым методом определения координаты $X_ц$ центра распределения является её оценка в виде *среднего арифметического* всех отсчётов, т. е. в виде

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_i \, . \tag{1.2}$$

Преимущественное использование этой оценки объясняется отнюдь не тем, что это «самая лучшая» или, как говорят математики, *эффективная* оценка центра, а тем, что это единственная оценка, которую можно выразить аналитически, т. е. формулой, и подставлять в таком виде в другие соотношения, анализировать их и т. д. Среднее квадратическое отклонение рассеяния этой оценки зависит от СКО σ_{xi} разброса усредняемых отсчётов и их числа n (при независимости отсчётов друг от друга) как

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma_{xi} \big/ \sqrt{n} \,. \qquad (1.3)$$

Таким образом, СКО случайной погрешности усредненного результата убывает по сравнению со СКО самих усредняемых отсчётов в $\sqrt{n}$ раз. На этом и основан принцип повышения точности в результате усреднения многократных отсчётов. Положительной стороной метода статистического усреднения является то, что при усреднении одновременно уменьшаются все случайные погрешности вне зависимости от их происхождения (диффузность, т. е. невоспроизводимость самого объекта исследования, случайные погрешности всех используемых средств измерений, случайные погрешности округления при вычислении отдельных наблюдений и т. д.). При этом соотношение (1.3) справедливо при любом законе распределения исходных данных (с конечным вторым моментом) и любом их числе, но при условии их н е з а в и с и м о с т и.

Однако, используя этот метод, следует помнить, что если во всех результатах наблюдений присутствует одна и та же систематическая погрешность, то согласно формуле (1.2) она никак не усредняется, т. е. систематические погрешности при этом не устраняются.

Другой особенностью метода усреднения является то, что он возможен в том случае, если исходные данные имеют разброс, т. е. в них первоначально сохраняются последние неустойчивые десятичные знаки.

Таким образом, оперируя оценками σ_{xi} и $\sigma_{\bar{x}}$, необходимо чётко различать их между собой и помнить, что они характеризуют лишь случайную составляющую погрешности. Оценка СКО σ_{xi} характеризует ширину полосы неопределённости самих исходных данных. Оценка же $\sigma_{\bar{x}}$ характеризует в $\sqrt{n}$ раз более узкую полосу неопределённости найденной усреднённой зависимости.

Закон распределения X при $n \geq 30$ близок к нормальному при любом законе распределения исходных данных. Поэтому переход от оценки $\sigma_{\bar{x}}$ к квантильной оценке погрешности с заданной доверительной вероятностью P производится в этом случае как

$$\Delta_P = t_H \sigma_{\bar{x}} = t_H \frac{\sigma_{xi}}{\sqrt{n}} \,,$$

где t_H — нормированная квантиль нормального распределения для заданной вероятности P.

Значения нормированных квантилей нормального распределения для ряда уровней значимости q = 1-P, где P — у двусторонняя вероятность, приведены в таблице 1.1:

Таблица 1.1

q	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002
P	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,995	0,998
t_n	1,28	1,64	1,96	2,33	2,58	2,810	3,090

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЯ

Произведено измерение случайной величины одного значения m раз одним из выбранных методов измерения с помощью средств измерения. Для этой выборки значений физической величины объёмом m

$$\varphi_{i1}\ ,\ \varphi_{i2}\ ,\ \cdots\ ,\ \varphi_{ik}\ ,\ \cdots\ ,\ \varphi_{im}$$

проводится статистическая обработка. Для этого данные располагаются в виде массива

$$\lfloor\varphi_{ij}\rfloor_{\mathrm{lxk}}=\begin{bmatrix} \varphi_{11} & , & \varphi_{12} & , & \cdots & , & \varphi_{1k} & , & \cdots & , & \varphi_{1k} \\ \varphi_{21} & , & \varphi_{22} & , & \cdots & , & \varphi_{2k} & , & \cdots & , & \varphi_{2k} \\ \cdots & , & \cdots & , & \cdots & , & \cdots & , & \cdots & , & \cdots \\ \varphi_{i1} & , & \varphi_{i2} & , & \cdots & , & \varphi_{ik} & , & \cdots & , & \varphi_{ik} \\ \cdots & , & \cdots & , & \cdots & , & \cdots & , & \cdots & , & \cdots \\ \varphi_{l1} & , & \varphi_{l2} & , & \cdots & , & \varphi_{lk} & , & \cdots & , & \varphi_{lk} \end{bmatrix}$$

После этого данные формируют в вариационный ряд:

$$-\infty\ <\ 0\ <\ \varphi_{ij}^{\min}\ <\ \ldots\ <\ \varphi_{ij}\ <\ \varphi_{ij}^{\max}\ <\ \infty\ . \qquad (2.1)$$

откуда после группирования значений (2.1) по s интервалам и определения относительных частот (частостей):

$$p_i=\frac{m_i}{m}$$

получают статистическую частотную модель экспериментальных данных. При этом, число интервалов L_s выбирается равным наибольшему из нечётных целых чисел, удовлетворяющих двустороннему неравенству :

$$L^{\min}{}_s < L_s < L^{\max}{}_s,$$

где

$$L^{\min}{}_s = 0{,}55\cdot m^{0,4}\ ,$$
$$L^{\max}{}_s = 1{,}22\cdot m^{0,4}\ .$$

Далее полученную модель нужно использовать для удаления возможных грубых промахов. Такая обработка данных получила название *цензурирование выборки*. Простейшая из них заключается в использовании правила - "3σ" .Здесь граница цензурирования $\varphi^{\text{гр}}$ назначается в виде

$$\left|\ \varphi^{\text{гр}}{}_s\ \right| = 3\sigma. \qquad (2.2)$$

Однако известно, что во многих случаях, назначение $\varphi^{\text{гр}}$, согласно (2.2), является жёстким, что обусловлено не учётом зависимости $\varphi^{\text{гр}}$ от объёма выборки и вида закона распределения. Так, для нормального распределения, при m = 100, появление значения

$$\varphi_{is} \geq \varphi^{\text{гр}}{}_s \qquad (2.3)$$

равного 3σ, можно считать промахом, то для равномерного — промахом будет уже $|\varphi^{\text{гр}}{}_s| = 1{,}87\sigma_s$. Таким образом, дальнейшая обработка данных, требует определения вида статистической модели. Далее, если значения ряда (2.1) φ_{is} будем считать распределёнными по нормальному закону, то плотность распределения вероятности

$$p(\varphi_{is}) = \frac{1}{\sigma_s\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\left(\frac{\varphi_{is} - M_s}{\sigma_s}\right)^2\right]$$

с параметрами M_s, σ_s, оценки которых определяются по экспериментальным данным выборки по формулам, соответственно,

$$M_s = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\varphi_{is} ,$$

$$\sigma_s = \sqrt{D_s} .$$

Здесь M_s , D_s — выборочные среднее и дисперсия значений, которые, как известно, оказываются близкими к истинным значениям математического ожидания и дисперсии при большом объёме выборки m. Так, например, если для вычисления выборочной дисперсии использовать выражение

$$D_s = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\varphi_{is} - M_s)^2 ,$$

оценка дисперсии оказывается смещённой, то есть, кроме разброса имеет место систематическая, отрицательная погрешность, возрастающая по мере уменьшения объёма выборки m. Для исключения этой погрешности значение D_s необходимо умножить на поправочный множитель Бесселя:

$$A = m / (m - 1).$$

В случае m = 100, A = 1,01, а $\sqrt{A}$= 1,005, то есть учёт поправки является несущественным.

Для оценки правомерности сделанного предположения о законе распределения воспользуйтесь известным, в прикладной статистике, составным критерием, когда вычисляют коэффициенты асимметрии

$$A_s = m^{-1}\sigma_s^{-3}\sum_{i=1}^{m}(\varphi_{is} - M_s)^3$$

и эксцесса

$$E_s = m^{-1}\sigma_s^{-4}\sum_{i=1}^{m}(\varphi_{is} - M_s)^4 ,$$

по которым делают заключение о близости экспериментального распределения к нормальному. Распределение принято считать нормальным, если выполняются условия:

$$\begin{cases} A_s < \alpha_1/3 \\ E_s < \alpha_2/3 \end{cases},$$

где α_1,α_2 — вспомогательные коэффициенты, зависящие от объёма выборки m

$$\alpha_1 = \sqrt{6(m-1)(m+1)^{-1}(m+3)^{-1}} ,$$

$$\alpha_2 = \sqrt{24(m-2)(m-3)(m-1)^{-2}(m+3)^{-1}(m+5)^{-1}} .$$

При удалении промахов важно также помнить о доверительной вероятности $P_д$ при обработке выборочных данных, зависящей от объёма выборки m. Учитывая, что под доверительной вероятностью понимают вероятность того, что в ряду при любом i соответствующее значение попадает в доверительный интервал, задаваемый границами цензурирования, то члены вариационного ряда являются оценкой соответствующих квантилей, разделяющих интервал вероятностей - [0, 1] на (m+1) частей с равными значениями вероятностей. В этом случае возможно определить, исходя из заданной доверительной вероятности $P_д$, необходимый объём m выборки с учётом числа $m_{отб}$ отбрасываемых членов ряда, согласно неравенству

$$m > 2\,(1 + m_{отб})/(1 - P_д). \qquad (2.3)$$

Так, например, при $P_д$ = 0,95 и при $m_{отб}$ = 0, 1, 2 будем иметь, соответственно, m= 40, 80, 120. То есть при использовании автоматической системы контроля при удалении промахов необходимо фиксировать $m_{отб}$ и проверять для объёма выборки m, первоначально заданного, условие (2.3). При невыполнении (2.3) следует пополнить выборку недостающими членами путём увеличения m. Если последнее невозможно, производят известную в статистике корректировку данных, заключающуюся в присвоении данным, содержащим промахи, значений равных ближайшим из числа входящих в доверительный интервал .

После удаления промахов корректируются параметры выборки и закона распределения, задаваемого в виде усечённого значениями φ_s^{max}, φ_s^{min} и сгруппированного по интервалам вариационного ряда, получаемого из ряда, и соответствующего его интервалам относительных частот.

Далее, используя результаты группирования значений по интервалам, строят гистограмму распределения значений.

Задание для самостоятельной работы

По результатам измерения случайной величины провести предварительную обработку результатов измерения, определить M_s , D_s, построить гистограмму. Для 10 интервалов определить выборочное среднее, медиану. Построить графики по полученным результатам.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ КРИТЕРИЕВ ОЦЕНКИ ВИДА ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Эффективность критерия определяется используемыми при его формировании параметрами закона распределения, получаемыми на основании статистических моментов различного порядка. Чем выше порядок момента, используемого при формировании статистики критерия, — тем большие объёмы выборки исходных данных обеспечивают несмещённость и состоятельность оценок параметров.

Одним из наиболее эффективных критериев, работающий на малых объёмах выборки, является критерий Пирсона (χ^2).

Пример. Вольтметром произведено 200 измерений известного значения напряжения U. При этом значения напряжений U распределились по девяти интервалам с частотами, представленными в таблице 3.1.

Таблица 3.1

Порядковый номер интервала i	Значения границ интервалов распределения значений напряжений [вольт]	Частота (частость) m
1	$-\infty \div -15$	6
2	$-15 \div -10$	11,5*)
3	$-10 \div -5$	15,5
4	$-5 \div 0$	22
5	$0 \div +5$	47,5
6	$5 \div 10$	42
7	$10 \div 15$	28
8	$15 \div 20$	17
9	$20 \div +\infty$	10,5
$\Sigma \underline{i} = 9$	—	$\sum m_i = 200$

,

*) дробные значения частот m_i получены из-за распределения поровну между интервалами значений напряжений, попавших на границы интервалов.

Задание: проверить гипотезу H_0 о соответствии закона распределения, порождающего значения физической величины — напряжений:

$$H_0{:}\Rightarrow\ f_{a,\sigma}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_u}\cdot\exp\left[-\left(\frac{u-a}{\sigma}\right)^2\right]. \qquad (3.1)$$

Решение: Для проверки гипотезы нужно найти статистические оценки параметров нормального закона распределения (2.1):

$$a = \frac{1}{n_в}\cdot\sum_j^n u_j,\ j = \overline{1,n_в},$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_j^n \left(u_j - a\right)^2.$$

Для данных, представленных в таблице 3.1, a=4,6 В, σ^2 =95,2 В^2.

Если для проверки гипотезы воспользоваться критерием Пирсона, то нужно построить статистику:

$$\chi^2 = \frac{\left(m_i - n\cdot p_i\right)^2}{n\cdot p_i},$$

где p_i — теоретическая вероятность события, состоящего в том, что значение напряжения попадает в i-й интервал. Согласно принимаемой гипотезе

$$p_i = \int_{U\text{н}}^{U\text{в}} f(u)du = \Phi(U\text{в}) - \Phi(U\text{н}).$$

Здесь $\Phi(\cdot)$ — функция Лапласа. Данная функция табулирована для стандартизованных значений случайных величин:

$$u_c = \frac{u-a}{\sigma}.$$

При этом значения $\Phi_0(u_c)$ в таблицах приведены только положительной полуоси аргументов, так как $f(u)$ предполагается симметричной относительно линии параллельной оси ординат, проходящей через точку абсцисс $u=a$ (рис. 3.1).

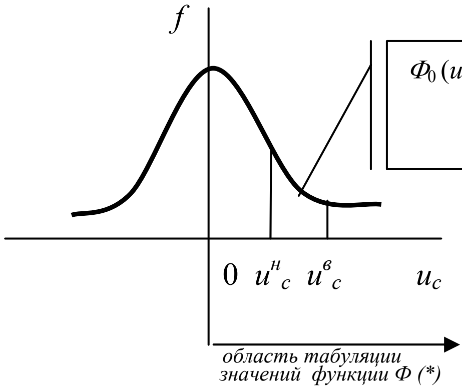

Рис 3.1 Табуляция значений функции Лапласа

Вместе с тем это не ограничивает использование таблиц значений Φ_0 $(\cdot)$ для отрицательных значений случайных величин:

$$p_i = \int_{-\infty}^{-Uc} f(u_c)du = 0{,}5 - \int_{0}^{Uc} f(u_c)du.$$

Значения теоретических вероятностей для приведенных в примере значений напряжений даны в таблице 3.2.

Таблица 3.2

Порядковый номер интервала i	Значение эмпирических частот m_i	теоретических вероятностей p_i	теоретических частот $n \cdot p_i$	$\chi^2 = \frac{(m_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i}$
1	6	0,0228	5,56	0,45
2	11,5	0,0453	9,06	0,66
3	15,5	0,0954	19,08	0,67
4	22	0,1557	31,14	2,68
5	47,5	0,1968	39,36	1,68
6	42	0,1928	38,56	0,31
7	28	0,1466	29,32	0,06
8	17	0,0864	17,28	0,05
9	10,5	0,0582	11,64	0,11
Σi = 9	∑=200	∑=1,000	∑=200	∑=6,61

В таблице 3.2 представлены значения χ^2 статистики, характеризующей разницу эмпирических и теоретических частот (частостей). Критерий, определяющий допустимое значение этой разницы для принятия гипотезы о нормальном законе для измеренных значений напряжений представляет собой неравенство:

$$\chi_{\Sigma}^{2} < \chi_{\alpha,\nu}, \qquad (3.2)$$

где $\chi_{\alpha,\nu}$ — табличное значение распределения Пирсона для уровня доверия

$$\alpha = 1 - P_{д}$$

и числа степеней свободы

$$\nu = k - r - 1.$$

Здесь $P_{д}$ — доверительная вероятность, k, r — соответственно количество интервалов и число параметров закона распределения .

В рассмотренном примере для $P_{д} = 0{,}95$ и $\nu = 9-2-1=6$:

$$\chi_{\alpha,\nu} = \chi_{0.05,\ 6} = 12{,}6.$$

Таким образом, неравенство (3.2) выполняется, следовательно, гипотеза о порождении исходных данных нормальным законом распределения является правомерной.

Задание для самостоятельной работы

Имея выборку из 90 значений измеряемых величин, разбейте её на три равные по объёму подвыборки и для каждой проверьте состоятельность гипотезы о нормальном законе распределения по критерию асимметрии и эксцесса и по критерию Пирсона (χ^2).

4. ИЗМЕРЕНИЕ В УСЛОВИЯХ ПОМЕХ
(Принцип максимального правдоподобия)

Измерения в условиях помех отличает неравноточность получаемых результатов в каждом конкретном единичном измерении. Отсутствие повторяемости результата при многократных измерениях может быть обусловлено рядом причин, главной из которых является случайный характер воздействий помех в процессе измерений. В общем случае диффузионный характер воздействий помех не позволяет провести чёткое разделение источников порождения результата и погрешности. Поэтому, при обработке результатов измерения нужно максимально использовать имеющуюся априорную (доопытную) информацию и информацию, получаемую путём измерений и статистической обработкой.

Если произведено n независимых измерений одного и того же значения физической величины u одним или разными приборами:

$$u_1, u_2, \ldots\ldots\ldots, u_i, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots u_n,$$

то данную информацию следует отнести к послеопытной (апостериорной).

В качестве априорной можно считать дисперсии каждого из результатов u_i :

$$\sigma_1,\ \sigma_2,\ \ldots,\ \sigma_i,\ \ldots,\ \sigma_n$$

К априорной информации так же следует отнести следующую:

1. Вид закона распределения случайной величины

$$f_{a,\sigma}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_u} \cdot \exp\left[-\left(\frac{u-a}{\sigma}\right)^2\right]. \quad (4.1)$$

2. Соотношение систематической и случайной погрешностей

$$\Delta^{\text{сист}} \ll \sigma_i$$

3. Характеристика равноточности измерений

$$\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \ \dots \neq \sigma_i \neq \dots \neq \sigma_n \quad (4.2)$$

или

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \ \dots = \sigma_i = \dots = \sigma_n \quad (4.3)$$

Геометрическая интерпретация неравноточности измерений представлена на рисунке 4.1:

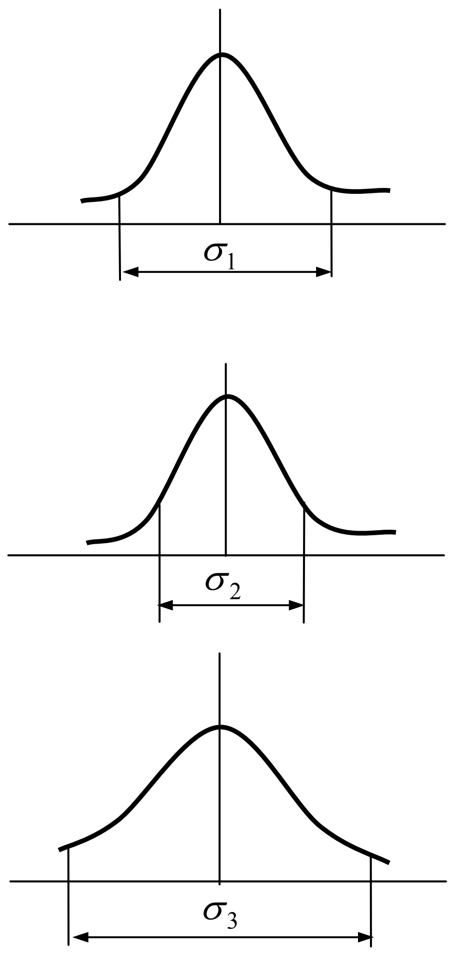

Рис. 4.1 Геометрическая интерпретация неравноточности измерений

Нахождение истинного значения измеряемой величины зависит от имеющейся априорной информации. Так, если случайные погрешности удовлетворяют условию (4.2),

$$U = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i \,.$$

В случае выполнения условия (4.3) дисперсия результата U

$$D(U) = D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i\right] = \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\| \begin{array}{c} 1\left| D(x) = M(x - M(x))^2 = M\left(x^2 - 2M(x)\cdot x + M^2(x)\right) = \right. \\ = Mx^2 - 2M(x)\cdot M(x) + M^2(x) = M\left(x^2\right) - M^2(x) \\ 2\left| D(x+y) = M(x+y)^2 - M^2(x+y) = \right. \\ = M(x^2 + 2xy + y^2) - M^2(x+y) = Mx^2 + 2M(x)M(y) + \\ + My^2 - (Mx + My)^2 = D(x) + D(y) \\ 3\left| D(c\cdot x) = M(c\cdot x)^2 - M^2(c\cdot x) = \right. \\ = c^2 Mx^2 - Mc^2 M^2 x = c^2 \cdot D(x) \end{array} \right\| = \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad D(U) = D\left[\frac{1}{n}\sum_{i}^{n} u_i\right] = \frac{1}{n^2}\sum D[u_i] = \frac{1}{n^2}\sum_{i}^{n}\sigma_i^2$$

Теперь, если поставить задачу нахождения истинного значения физической величины $u_{ист}$ и погрешности, которую можно ожидать в результате многократных измерений, то нужно сделать ряд замечаний и выводов.

Первое: результат измерений отличается от погрешности на неслучайную величину $U_{ист}$. Если исходить из того, что дисперсия случайной величины не изменится при суммировании её с неслучайной величиной, следует, что дисперсия результата всегда совпадает с дисперсией погрешности.

$$\sigma(\Delta u) = \sigma(u) = \sqrt{D[U]} = \frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i}^{n}\sigma_i^2} \ .$$

Второе: если предположить, что какой-то результат из выборки точнее или, что то же самое, имеет меньшее СКО, чем СКО всех результатов

$$\sigma_1 << \sigma_2,\ \sigma_3,\ \ldots\ \sigma_n,$$

тогда

$$\sigma_1 < \frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i}^{n}\sigma_i^2} \ .$$

Таким образом, нахождение истинного значения сводится к задаче такой оценки измеряемой величины, которая была бы точнее самого точного из результатов наблюдений из выборки. В данном случае используется принцип максимального правдоподобия, когда наиболее правдоподобной следует считать такую оценку значения, при принятии которой в качестве истинного значения плотность вероятности полученных значений результатов будет наибольшей.

Согласно (4.1) плотность вероятности получения u_i

$$f_{a,\sigma}(u_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_u}\cdot\exp\left[-\left(\frac{u - u_{ист}}{\sigma}\right)^2\right].$$

Теперь, если исходить из независимости единичных u_i измерений то вероятность получения истинного значения $u_{ист}$ в выборке можно оценить как произведение вероятностей получения каждого i-го результата

$$\text{P} = \prod_{i=1}^{n} f_i \,.$$

Максимальной плотности вероятности соответствует условие

$$\sum_{i=1}^{n} \left(u_i - u_{ист}\right)^2 / 2\sigma^2 \to \min,$$

так как показатель степени в экспоненте отрицательный .

Таким образом, на выборке значений получим так называемую *функцию правдоподобия для истинного значения*

$$L(u_{ист}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i - u_{ист}}{2\sigma_i^2} \;. \qquad (4.4)$$

Далее, после взятия частной производной по аргументу $u_{ист}$ в (4.4) и приравнивая её нулю, получим

$$u_{ист} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{u_i}{\sigma_i^2}\right)}{\sum \dfrac{1}{\sigma_i^2}} \;.$$

Отсюда несложно получить выражение для СКО:

$$\sigma = \sqrt{D\left[\frac{\sum \dfrac{u_i}{\sigma_i^2}}{\sum \dfrac{1}{\sigma_i^2}}\right]} = \sqrt{\frac{1}{\sum \dfrac{1}{\sigma_i^2}}} \;.$$

Задание для самостоятельной работы

Разбить имеющуюся выборку на подвыборки по десять измерений, определить математическое ожидание и дисперсии и далее, считая подвыборочные средние (мат. ожидание) результатами измерений с параметрами СКО равными подвыборочным дисперсиям, найти истинное значение для десяти измерений. Для выполнения самостоятельного задания использовать принцип максимального правдоподобия.

5. ХАРАКТЕРИСТИКИ ТОЧНОСТИ РЕЗУЛЬТАТА ИЗМЕРЕНИЯ (Дисперсионный анализ)

Характеристиками точности результата измерения являются систематические и случайные погрешности. Соотношение между погрешностями определяет действия по повышению точности измерений.

К числу таких действий относится использование многократных измерений, когда измеряют одно и то же значение конечное число раз, а в качестве результата используют среднее из множества полученных значений. Многократные измерения проводят в расчёте на взаимную компенсацию случайных погрешностей в единичных результатах измерения. Эффект компенсации тем выше, чем ближе закон распределения случайной погрешности к нормальному и чем больше число измерений. Здесь возникает проблема определения необходимого для требуемой точности числа измерений. Увеличивать число измерений целесообразно до тех пор, пока доверительная погрешность измерения не будет определяться только систематической погрешностью. Систематическими погрешностями можно пренебречь по сравнению со случайными, если

$$\frac{И}{S_{\bar{X}}} < 0{,}8\,, \qquad (5.1)$$

где Θ — оценка границ суммы не исключённых остатков систематических погрешностей;

$S_{\overline{X}}$ — оценка СКО среднего арифметического.

В том случае, если

$$\frac{И}{S_{\bar{X}}} > 0{,}8\,, \qquad (5.2)$$

можно пренебречь случайными погрешностями и точность результата измерения допустимо характеризовать систематической погрешностью.

Максимальное число измерений n_{max} можно определить, если воспользоваться неравенством (4.2), при известных значениях числа проведённых наблюдений n и S_X. Оценка среднего квадратического отклонения $S_{\overline{X}}$ может быть выражена через S оценку среднего квадратического отклонения группы наблюдений:

$$S_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}}\,.$$

Тогда, используя выражение (5.2), будем иметь

$$\frac{И/S}{\sqrt{n}} > 8\,. \qquad (5.3)$$

Следовательно, предполагая в неравенстве (5.3) n равным n_{max}, получим

$$n_{MAX} = 64(S/И)^2\,. \qquad (5.4)$$

Использование последнего выражения (5.4) для определения длины серий измерений $n_{\max}$ требует значения Θ — не скомпенсированной составляющей систематической погрешности. Данная составляющая определяется особенностями конкретного прибора, метода, порядком выполнения методики измерения. Как правило, все эти особенности могут быть оговорены в каждом конкретном случае разработчиком средства измерения при нормировании погрешностей или в метрологических инструкциях на выполнение измерения и т. п., в зависимости от характера влияющих факторов. Знание такого рода факторов доступно только разработчику конкретных средств измерения, поэтому ему вменяется в обязанность предоставление такого рода информации пользователю средств измерения в технической документации. Задачей пользователя при многократных измерениях является установление доверительных границ к результату измерения (ГОСТ 8.401—80). Для достижения требуемой точности в распоряжении пользователя в каждом конкретном случае выбор средств измерения и варьирование долины (объёма подвыборки), в зависимости от условий проведения эксперимента.

Пример 1. При многократных измерения малых напряжений U [вольт] известно, что $\bar{U}$ =1,98 В, $S_{\bar{U}}$ =0,05 В, Θ=0,03 В. Оценить результат измерения.

Решение. Под оценкой понимается определение доверительных границ, когда

$$U_{рез} = \overline{U} \pm \Delta U \,. \tag{5.5}$$

В этом случае под результатом следует понимать среднее значение $\bar{U}$, а погрешность определяется среднеквадратическим отклонением среднего $S_{\bar{U}}$, которое можно определить по сериям измерения. Но прежде чем воспользоваться формой записи (5.5), необходимо установить, что определяющей является случайная составляющая погрешность. Для этого нужно проверить выполнение условий (5.1), (5.2). В рассматриваемом случае:

$$\left.\begin{matrix} И = 0{,}03 \\ S_{\overline{U}} = 0{,}05 \end{matrix}\right\} \to \frac{И}{S_{\overline{U}}} = 0{,}6 \to \begin{vmatrix} (5.1) \\ (5.2) \end{vmatrix} \to 0{,}6 < 0{,}8 \to (4.1)\,, \tag{5.6}$$

следовательно, результат измерения определяется случайной составляющей погрешности и должен быть представлен в виде (5.5). Далее, задача нахождения случайной составляющей погрешности ΔU представляет собой задачу на постоянство среднего значения или определения доверительных границ математического ожидания, которая может быть решена с использованием статистики Стьюдента (или, что то же самое, распределение Госсета).

В общем случае t-распределение и соответственно t-критерий служат для оценки однородности выборок путём сравнения двух средних из нормально распределённых генеральных совокупностей $\{X\}$ и $\{Y\}$ в предположении, что дисперсии σ_X и σ_Y равны. При этом значения дисперсий могут быть и неизвестны. Так, например, когда выдвигается гипотеза

$$MX=MY,$$

где X $\{x_1\ x_2\ \dots x_{n1}\}$, $Y\{y_1\ y_2\dots y_{n2}\}$ — выборки независимых случайных величин. При этом объёмы выборки могут быть и различны, $n_1\neq n_2$. Для формирования критерия используется T-статистика:

$$T=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{(n_1-1)\cdot S_X^2+(n_2-1)\cdot S_Y^2}}\times\sqrt{\frac{n_1n_2(n_1+n_2+2)}{n_1+n_2}}$$

При выбранных предположениях о нормальности распределений и равенстве дисперсий гипотеза о равенстве математических ожиданий (арифметических средних – статистических оценок математических ожиданий) будет верна, если сформированная на выборках T-статистика удовлетворяет t-распределению с $(n_1+\ n_2\ -2)$ степенями свободы. Критическая область принятия решения о признании верности гипотезы устанавливается исходя из уровня значимости $\alpha=1-P_{\text{дов}}$, где $P_{\text{дов}}$ — доверительная вероятность, и $K=n_1+n_2-2$ — число степеней свободы . По таблице t-распределения можно найти $t_{\text{кр}}=t_{\alpha,\kappa}$. Гипотеза не принимается , если $|T|>t_{\alpha,\kappa}$.

В случае проверки гипотез о средних значениях нормальных распределений, когда результаты наблюдений X_1, X_2, … X_n взаимно независимы с неизвестными параметрами a и σ^2, для проверки гипотезы равенства $a=a_0$ используется статистика

$$t_\alpha=\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-a_0}{s}\ ,$$

гипотеза принимается, если

$$\left|\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-a_0}{s}\right|\le t_\alpha\ .$$

Распределение Стьюдента, как видно из последнего выражения, позволяет назначить доверительный интервал для арифметического среднего, полученного на определённом объёме выборки

$$\left|\overline{X}-a_0\right|\le t_\alpha s/\sqrt{n}\,.$$

Логическая последовательность действий, аналогичная (5.6), здесь следующая:

$P_{\text{дов.}}\to t_{\text{Ст}}\to t_{(1\text{-Рдов})}\to$ | табл. распред. | $\to t_{\text{ст}}\cdot S_{\overline{U}}=\Delta U\to\Delta U=2{,}09\cdot0{,}05\approx0{,}1$

Таким образом, получим:

$$U_{\text{рез}}=1{,}98\pm0{,}1\ [\text{вольт}].$$

Пример 2. Данный пример относится к случаю, когда граница Θ — не скомпенсированной составляющей систематической погрешности определена нестатистическими методами. Допустим, что в задаче, представленной в примере 1, имеет место изменение Θ от значения Θ_1=0,03 В до значения Θ_2=0,17 В. Данное изменение может быть вызвано изменением какого-то влияющего фактора за пределами нормируемых производителем погрешностей (дополнительная погрешность).

Тогда, повторяя рассуждения (5.6), для данного случая будем иметь:

$$\left.\begin{array}{l} И = 0{,}17 \\ S_{\overline{U}} = 0{,}05 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{И}{S_{\overline{U}}} = 3{,}4 \rightarrow \left|\begin{array}{c}(5.1)\\(5.2)\end{array}\right| \rightarrow 3{,}4 > 0{,}8 \rightarrow (4.2)\,,$$

т. е. всё определяется систематической погрешностью. Тем не менее погрешность ΔU может быть вычислена с помощью таблицы Стьюдента, из которой берётся $t_{ст} = t_{1\text{-}P_{дов}} = t_{0,05}$=2,09 при $P_{дов}$= 0,95, и $t_{0,05} \cdot S_{\bar{U}}$ = 0,1 вольт. Но поскольку граница не исключённых остатков систематических погрешностей определена нестатистическими методами, то, предполагая, что в границах $\pm\,\Theta$ погрешность распределена равномерно, следует принять

$$(t_q)_v = \Theta\,,$$

где t_q — q-процентная точка распределения Стьюдента, а $(t_q)_v$ — q-процентная точка распределения композиции не исключенных остатков систематических погрешностей. Тогда можно вычислить коэффициент, соответствующий q-процентной точке композиции распределения случайных погрешностей и не исключённых остатков систематических погрешностей S_Σ и затем определить ΔU.

$$\left(t_q\right)_У = \frac{И_2 + t_{0,05} \cdot S_{\overline{U}}}{S_{\overline{U}} + (И_2 / t_{0.05}^{равном})} = \frac{0{,}17 + 0{,}10}{0{,}05 + (0{,}17/1{,}73)} = \frac{0{,}27}{0{,}15} = 1{,}8\,.$$

Далее

$$S_\Sigma = \sqrt{S_{\overline{U}}^2 + \left(t_{0,05} \cdot S_{\overline{U}}\right)^2} = \sqrt{0{,}025 + 0{,}01} = 0.11 \quad [\text{вольт}].$$

Тогда

$$\Delta U = S_\Sigma \cdot (t_q)_v = 1{,}8 \cdot 0{,}11 = 0{,}20\ [\text{вольт}].$$

Поэтому

$$U_{рез} = 1{,}98 \pm 0{,}20\ [\text{вольт}].$$

Таким образом, для заданной вероятности могут быть определены границы, в которые укладывается результат при проведении многократных измерений. Изменяя длины серии измерений (объём выборки), можно увеличить точность измерений, если будет сохранять однородность выборки (серии), или, что то же самое, стабильность измерений.

Использование процедуры проверки равенства математических ожиданий в сериях измерений для оценки стабильности измерительных алгоритмов в случае многократных измерений приведённым выше способом осложняется при проведении автоматических измерений или выполнении сложных измерительных методик. В первом случае будут иметь место длинные серии, и результаты усреднения сгладят изменения математического ожидания. Во втором случае к проверке гипотезы постоянства математического ожидания некоторой серии результатов сводится задача постоянства систематической погрешности в процессе поверки или влияния субъективных факторов, определяемых качествами экспериментатора, условиями проведения эксперимента и т. п., а здесь трудно говорить, соответственно, о не скомпенсированной части систематической погрешности. При этом остается неоднозначность вопроса о требуемом объёме выборки (серии).

Дисперсионный анализ для проверки гипотезы о равенстве математических ожиданий в различных сериях измерения предполагает использование статистики, предполагаемой распределением Фишера, что значительно упрощает процедуру проверки. Данная статистика строится на предположении, что одинаковы математические ожидания внутри одной серии. Дисперсию нормальной погрешности наблюдений в предположении об одинаковости математического ожидания математического ожидания каждого наблюдения можно оценить двумя независимыми способами.

Первый: усреднением оценок дисперсии, полученных для каждой серии:

$$_1\tilde{M}_2 = \frac{1}{c}\sum_{i=1}^{c} M_{2i} = \frac{1}{c(n-1)}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=n(i-1)+1}^{ni}\left[x_{измj} - \frac{1}{n}\sum_{\nu=n(i-1)+1}^{ni} x_{изм\,\nu}\right]^2$$

где c — количество серий измерения; n — длина серии (объём подвыборки). Значение $_1M_{2i}$ даёт несмещённую оценку дисперсии погрешности наблюдений независимо от того, изменяется математическое ожидание от серии к серии или нет. Поэтому $_1M_2$ так же даёт несмещённую оценку σ_Δ^2 независимо от того, истинна или ложна проверяемая гипотеза. Эта оценка имеет $c(n\text{-}1)$ степеней свободы.

Второй способ оценки дисперсии заключается в оценивании дисперсии оценок математического ожидания, полученных для каждой серии:

$$m_{1i}^* = \frac{1}{n}\sum_{j=n(i-1)+1}^{ni} x_{измеj}\,. \qquad (5.7)$$

Дисперсия оценки (5.7) в n раз меньше дисперсии единичного результата, поэтому

$$_2\tilde{M}_2 = n\,\tilde{M}_{2m_1^*} = \frac{n}{c-1}\sum_{i=1}^{c} M_{2i} = \frac{1}{c(n-1)}\sum_{i=1}^{c}\left[m_{1i}^* - \frac{1}{c}\sum_{\nu}^{c} m_{1\nu}^*\right]^2 .$$

Оценка $_2M_2$ имеет (c-1) степень свободы. При истинности проверяемой гипотезы $_2M_2$ как $_1M_2$ дает несмещённую оценку σ_Δ^2. Если теперь $m_{1i}=M[m_{1i}^*]$ изменяется от серии к серии, то математическое ожидание $_2M_2$ увеличивается.

Отношение

$$F = \frac{{}_2M_2}{{}_1M_1}$$

при справедливости проверяемой гипотезы имеет распределение Фишера (или F-распределение, или распределение отношения дисперсий). При нарушении проверяемой гипотезы математическое ожидание F увеличивается, поэтому проверяемая гипотеза принимается если

$$F \le F_{c(n-1);c-1;\,\alpha},$$

где $F_{\mathrm{n1;\ n2;}\ \alpha}$ — процентная точка распределения Фишера, α =1- $P_{дов}$, $P_{до}$— доверительная вероятность. В противном случае гипотеза отвергается.

Самостоятельное задание

Определите точностные характеристики проведённых измерений. Проведите анализ стабильности измерений, используя критерии Стьюдента и Фишера. Определите возможные источники нестабильности измерений.

Библиографический список

1. Соболев, В. И. Информационно-статистическая теория измерений : учебник для вузов/ В. И. Соболев. – М. : Машиностроение, 1983. – 224 с.
2. Новицкий, П. В. Оценка погрешностей результатов измерений / П. В. Новицкий, И. А. Зограф. – 2-е изд., перераб. и доп. – Л. : Энергоатомиздат, 1991. – 304 с.
3. Евтихиев, Н. Н. Измерение электрических и неэлектрических величин / Н. Н. Евтихиев, Я. А. Купершмидт, В. Ф. Папуловский, В. Н. Скугоров ; под общ. ред. Н. Н. Евтихиева. – М. : Энергоатомиздат, 1990. – 352 с.
4. Грановский, В. А. Методы обработки экспериментальных данных при измерениях / В. А. Грановский, Т. Н. Сирая. – Л. : Энергоатомиздат, 1990. –288 с.
5. Елисеева, И. И. Теория статистики с основами теории вероятностей / И. И. Елисеева, В. С. Князевский, Л. И. Ниворожкина, З. А. Морозова ; под ред. И. И. Елисеевой – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2001. – 446 с.

Приложение 1

Значения χ_{α}^{2}, удовлетворяющие равенству $\int\limits_{\chi_{\alpha}^{2}}^{+\infty} p_{\nu}(x)dx = \alpha$, Таблица П.1.1

где $p_{\nu}(x)$ - плотность хи-квадрат распределения с ν степенями свободы

ν \ a	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,000	0,001	0,004	0,016	0,064	0,148	0,455	1,074	1,642	2,710	3,840	5,410	6,640	10,83
2	0,020	0,040	0,103	1,211	0,446	0,713	1,386	2,410	3,220	4,600	5,990	7,820	9,210	13,82
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,370	3,660	4,640	6,250	7,820	9,840	11,34	16,27
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,200	3,360	4,880	5,990	7,780	9,490	11,67	13,28	18,46
5	0,554	0,742	1,145	1,610	3,340	3,000	4,350	6,060	2,290	9,240	11,07	13,39	15,09	20,50
6	0,872	1,134	1,635	2,200	3,070	3,830	5,350	7,230	8,560	10,64	12,59	15,03	16,81	22,50
7	1,239	1,564	2,170	2,830	3,820	4,670	6,350	8,380	9,800	12,02	14,07	16,62	18,48	24,30
8	1,646	2,030	2,730	3,490	4,590	5,530	7,340	9,520	11,03	13,36	15,51	18,17	20,10	26,10
9	2,090	2,530	3,320	4,170	5,380	6,390	8,340	10,66	12,24	14,68	16,92	19,68	21,70	27,90
10	2,560	3,60	3,940	4,860	6,180	7,270	9,340	11,78	13,44	15,99	18,31	21,20	23,20	29,60
11	3,050	3,610	4,580	5,580	6,990	8,150	10,34	12,90	14,63	17,28	19,68	22,60	24,70	31,30
12	3,570	4,180	5,230	6,300	7,810	9,030	11,34	14,01	15,81	18,55	21,00	24,10	26,20	32,90
13	4,110	3,760	5,890	7,040	8,630	9,930	12,34	15,12	16,98	19,81	22,40	25,50	27,70	34,60
14	4,660	5,370	6,570	7,790	9,470	10,82	13,34	16,22	18,15	21,10	23,70	26,90	29,10	36,10
15	5,230	5,980	7,260	8,550	10,31	11,72	14,34	17,32	19,31	22,30	25,00	28,30	30,60	37,70
16	5,810	6,610	7,960	9,310	11,15	12,62	15,34	18,42	20,50	23,50	26,30	29,60	32,00	39,30
17	6,410	7,260	8,670	10,08	12,00	13,53	16,34	19,51	21,60	24,80	27,60	31,00	33,40	40,80
18	7,020	7,910	9,390	18,86	12,86	14,44	17,34	20,60	22,80	26,00	28,90	32,30	34,80	42,30
19	7,630	8,57	11,11	11,65	13,72	15,35	18,34	21,70	23,90	27,20	30,10	33,70	36,20	43,80
20	8,260	9,240	10,85	12,44	14,58	16,27	19,34	22,80	25,00	28,40	31,40	35,00	37,60	45,30
21	8,900	9,920	11,59	13,24	15,44	17,18	20,30	23,90	26,20	29,60	32,70	36,30	38,90	46,80
22	9,540	10,60	12,34	14,04	16,31	16,10	21,30	24,90	27,30	30,80	33,90	37,70	40,30	48,30
23	10,20	11,29	13,09	14,85	17,19	19,02	22,30	26,00	28,40	32,00	35,20	39,00	41,6	49,70
24	10,86	11,99	13,85	15,66	18,06	19,94	23,30	27,10	29,60	33,20	36,40	40,30	43,00	51,20
25	11,52	12,70	14,61	16,47	18,94	20,90	24,30	28,20	30,70	34,40	37,70	41,70	44,30	52,60
26	12,20	13,41	15,38	17,29	19,82	21,80	25,30	29,20	31,80	35,60	38,90	42,90	45,60	54,10
27	12,88	14,12	16,15	18,11	20,70	22,70	26,30	30,30	32,90	36,70	40,10	44,10	47,00	55,50
28	13,56	14,85	16,93	18,94	21,60	23,60	27,30	31,40	34,00	37,90	41,30	45,40	48,30	56,90
29	14,26	15,57	17,71	19,77	22,50	24,60	28,30	32,50	35,10	39,10	42,60	46,70	49,60	58,30
30	14,95	16,31	18,49	20,60	23,40	25,50	29,30	33,50	36,20	40,30	43,80	48,00	50,90	59,70

Продолжение прил. 1.

Таблица П.1.2

Значение t – критерия Стьюдента
при условиях значимости 0,10; 0,05; 0,01

Число степеней свободы *df*	*P*			Число степеней свободы *df*	*P*		
	0,10	0,05	0,01		0,10	0,05	0,01
1	6,3138	12,706	63,657	18	1,7341	2,1009	2,8784
2	2,9200	4,3027	9,9248	19	1,7291	2,0930	2,8609
3	2,3534	3,1825	5,8409	20	1,7247	2,0860	2,8453
4	2,1318	2,7764	4,6041	21	1,7207	2,0796	2,8314
5	2,0150	2,5706	4,0321	22	1,7171	2,0739	2,8188
6	1,9432	2,4469	3,7074	23	1,7139	2,0687	2,8073
7	1,8946	2,3646	3,4995	24	1,7109	2,0639	2,7969
8	1,8595	2,3060	3,3554	25	1,7081	2,0595	2,7874
9	1,8331	2,2622	3,2498	26	1,7056	2,0555	2,7787
10	1,8125	2,2281	3,1693	27	1,7033	2,0518	2,7707
11	1,7959	2,2010	3,1058	28	1,7011	2,0484	2,7633
12	1,7823	2,1788	3,0545	29	1,6991	2,0452	2,7564
13	1,7709	2,1604	3,0123	30	1,6973	2,0423	2,7500
14	1,7613	2,1448	2,9768	40	1,6839	2,0211	2,7045
15	1,7530	2,1315	2,9467	60	1,6707	2,0003	2,6603
16	1,7459	2,1199	2,9208	120	1,6577	1,9799	2,6174
17	1,7396	2,1098	2,8982	∞	1,6449	1,9600	2,5758

Продолжение прил. 1

Значение F критерия Фишера при уровне значимости 0,05

Таблица П.1.3

df_2	df_1																
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*14*	*16*	*20*	*30*	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244	245	246	248	250	254
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40	19,41	19,42	19,43	19,44	19,46	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,19	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74	8,71	8,69	8,66	8,62	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91	5,87	5,84	5,80	5,74	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68	4,64	4,60	4,56	4,50	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00	3,96	3,92	3,87	3,81	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3\73	3,68	3,63	3,60	3,57	3,52	3,49	3,44	3,38	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28	3,23	3,20	3,15	3,08	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07	3,02	2,98	2,93	2,86	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91	2,86	2,82	2,77	2,70	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79	2,74	2,70	2,65	2,57	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69	2,64	2,60	2,54	2,46	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60	2,55	2,51	2,46	2,38	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53	2,48	2,44	2,39	2,31	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48	2,43	2,39	2,33	2,25	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42	2,37	2,33	2,28	2,20	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,41	2,38	2,33	2,29	2,23	2,15	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,37	2,34	2,29	2,25	2,19	2,11	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,55	2,48	2,43	2,38	2,34	2,31	2,26	2,21	2,15	2,07	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,52	2,45	2,40	2,35	2,31	2,28	2,23	2,18	2,12	2,04	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,28	2,25	2,20	2,15	2,09	2,00	1,81

Окончаниние таблицы П.1.3

df_2	df_1																
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*14*	*16*	*20*	*30*	∞
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,47	2,40	2,35	2,30	2,26	2,23	2,18	2,13	2,07	1,89	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,45	2,38	2,32	2,28	2,24	2,20	2,14	2,10	2,04	1,96	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,43	2,36	2,30	2,26	2,22	2,18	2,13	2,09	2,02	1,94	1,73
25	4,24	3,88	2,99	2,76	2,60	2,49	2,41	2,34	2,26	2,24	2,20	2,16	2,11	206	2,00	1,92	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,18	2,15	2,10	2,05	1,99	1,90	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,30	2,25	2,20	2,16	2,13	2,08	2,03	1,97	1,88	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,36	2,29	2,24	2,19	2,15	2,12	2,06	2,02	1,96	1,87	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,14	2,10	2,05	2,00	1,94	1,85	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,34	2,27	2,21	2,16	2,12	2,09	2,04	1,99	1,93	1,84	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,07	2,04	2,00	1,95	1,90	1,84	1,74	1,51
50	4,03	2,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,02	1,98	1,95	1,90	1,85	1,78	1,69	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,95	1,92	1,86	1,81	1,75	1,65	1,39
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,10	2,03	1,97	1,92	1,88	1,85	1,79	1,75	1,68	1,57	1,28
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	2,01	1,94	1,88	1,83	1,79	1,75	1,69	1,64	1,57	1,46	1,00

Примечание: df_1, df_2 – числа степеней свободы для большей и меньшей дисперсии соответственно

Приложение 2

Таблицы значений выборки, согласно варианту

Вариант 1	49,4	43,1	48,0	49,5	44,7	46,4	50,6	51,0	46,5	51,7
	45,3	53,1	45,6	53,1	50,0	46,4	50,8	52,4	50,1	45,0
	45,3	48,8	58,2	53,9	51,8	48,4	52,0	45,3	59,0	48,1
	53,0	46,1	48,6	50,0	49,2	53,8	47,4	48,1	55,1	53,8
	56,3	48,6	50,6	48,7	45,2	51,2	48,8	52,0	51,5	59,6
	59,6	48,7	49,0	60,4	56,5	45,8	56,0	57,5	43,7	52,6
	52,1	50,7	51,5	54,2	51,9	49,7	49,3	50,3	55,8	50,7
	48,9	49,4	49,0	50,5	49,9	45,4	50,9	54,1	49,4	52,7
	49,2	45,6	38,1	44,3	47,8	46,8	47,8	53,7	45,0	48,4

Вариант 2	64,4	60,3	62,2	68,5	61,9	61,2	66,1	65,7	61,0	66,4
	60,1	68,6	60,2	66,8	65,6	58,9	64,5	67,5	65,2	60,2
	60,7	65,1	74,8	68,3	67,3	61,3	67,5	63,3	76,0	62,5
	68,8	62,6	62,7	65,4	62,3	69,2	60,6	63,2	68,8	69,2
	73,4	64,3	65,2	63,2	70,6	65,1	63,4	66,6	66,1	75,9
	73,5	64,9	64,7	63,6	72,0	60,5	72,1	73,0	58,1	68,5
	66,7	67,3	68,7	69,6	65,5	64,3	66,1	65,3	73,5	67,9
	62,9	64,6	64,7	60,2	66,1	61,3	66,1	69,1	64,0	69,6
	65,1	59,0	52,3	58,4	63,1	62,6	64,1	70,7	63,3	62,6

Вариант 3	76,6	71,6	74,3	80,6	73,2	71,7	78,4	76,3	70,9	77,0
	70,1	79,5	71,5	78,8	75,6	68,4	74,0	79,7	77,9	71,3
	71,0	75,0	87,0	79,8	78,7	71,6	77,9	73,7	88,0	73,8
	80,0	75,2	74,8	77,6	71,3	82,0	72,6	73,8	79,4	80,1
	86,3	75,3	77,2	73,5	80,0	77,2	72,9	75,2	77,5	88,0
	83,8	75,4	75,2	74,5	83,0	70,8	83,1	84,9	67,5	78,8
	77,0	78,3	80,8	80,7	75,2	75,5	76,7	77,9	84,5	78,0
	73,1	75,7	76,0	72,9	77,7	74,4	77,4	82,0	75,4	82,7
	76,7	70,9	64,3	69,7	74,8	75,0	76,6	81,6	75,1	75,9

Вариант 4	85,0	81,7	83,8	91,1	83,2	80,3	87,6	84,7	80,1	87,2
	79,4	89,3	80,1	87,8	84,9	76,3	84,3	90,0	87,0	82,1
	80,3	85,0	97,0	89,4	88,5	80,8	88,1	83,4	98,5	83,4
	90,0	85,6	84,2	86,5	80,0	90,6	81,3	83,2	88,6	89,3
	96,2	85,0	86,7	82,9	90,4	85,7	82,2	84,8	86,1	97,7
	95,0	85,1	84,7	83,3	92,6	79,3	91,8	94,6	76,0	89,1
	85,3	87,8	90,7	90,3	84,0	84,4	86,7	87,3	94,8	89,2
	82,5	85,3	85,5	82,9	87,8	83,4	87,3	91,5	84,9	91,7
	86,1	79,6	73,4	79,2	84,2	83,1	85,3	92,0	84,9	86,5

Вариант 5	94,0	89,4	90,0	99,6	91,1	88,1	95,5	92,7	88,2	95,2
	86,6	97,2	87,8	95,7	92,0	83,3	91,3	98,9	95,5	89,9
	88,4	92,6	104	98,1	96,5	88,5	96,0	91,9	106	91,5
	97,9	93,9	93,1	95,6	88,1	98,5	90,0	90,7	96,3	97,1
	104	92,8	94,4	89,8	98,2	93,5	89,8	92,6	93,3	105
	102	92,6	91,9	90,6	100	86,9	99,4	103	82,9	96,9
	92,9	96,5	99,3	98,0	91,4	92,2	93,7	95,6	102	96,9
	89,8	94,0	94,4	91,1	96,2	90,3	96,9	98,7	93,2	99,6
	93,6	87,3	81,0	86,5	91,9	91,5	93,3	100	93,4	93,8

Вариант 6	101	96,3	97,6	107	98,2	94,3	101	98,8	95,4	102
	93,0	104	94,8	102	98,8	89,1	98,2	106	103	97,3
	96,1	100	110	104	103	95,3	102	98,7	115	97,9
	104	100	100	102	95,2	105	96,7	96,9	102	103
	112	100	101	95,8	95,5	100	96,2	98,8	100	112
	108	102	98,6	97,9	107	93,0	104	110	89,0	103
	99,4	103	106	105	98,0	99,5	100	102	109	103
	96,3	100	102	97,7	104	97,1	101	105	100	106
	100	95,7	88,7	94,3	98,8	98,3	100	107	99,5	100

Вариант 7	108	101	103	112	103	100	108	104	100	108
	97,9	109	100	108	104	94,9	103	110	109	103
	102	106	115	110	109	101	108	105	120	104
	110	106	106	108	100	110	102	103	108	109
	117	106	107	101	111	105	101	104	105	118
	114	107	104	104	112	99,0	110	116	94,9	109
	104	109	112	110	103	105	105	108	114	110
	101	106	108	103	108	101	107	111	106	111
	105	101	93,6	99,8	104	102	106	112	105	106

Вариант 8	114	107	108	118	108	106	113	109	107	114
	102	115	107	113	110	100	109	118	116	109
	108	112	120	115	115	107	114	111	126	110
	115	111	112	114	106	116	108	108	114	114
	122	112	113	106	115	111	107	110	111	123
	119	111	109	110	118	105	114	122	100	115
	109	115	116	116	109	110	110	115	120	116
	107	112	115	109	114	105	113	116	112	117
	110	107	100	105	109	108	112	118	110	111

Вариант 9	179	113	113	124	114	111	119	114	113	119
	108	120	112	119	115	105	114	124	122	116
	115	118	125	121	121	113	120	118	132	116
	120	117	118	119	112	121	115	115	120	120
	127	118	120	111	121	117	112	117	117	129
	124	116	115	115	124	110	119	128	105	120
	114	122	123	122	114	116	115	121	125	122
	112	118	122	114	120	110	1118	122	118	122
	115	113	106	111	115	113	117	125	115	117

Продолжение прил. 2

Вариант 10	126	119	119	130	120	117	126	120	119	126
	113	126	119	125	121	111	120	130	129	122
	121	124	129	126	128	119	127	125	137	122
	126	123	125	125	118	127	121	122	125	126
	131	125	125	116	128	123	119	123	122	135
	129	122	121	121	129	115	124	134	111	126
	120	128	129	127	120	122	120	127	131	129
	118	123	129	120	126	115	123	127	124	127
	121	119	112	117	121	119	123	130	122	122

Вариант 11	133	125	125	136	126	124	132	125	125	133
	120	132	125	131	127	117	126	137	135	129
	128	130	135	132	134	125	133	132	144	129
	131	128	132	132	125	132	127	128	132	131
	139	131	132	122	134	128	125	130	128	141
	134	128	126	128	135	121	129	140	117	131
	125	134	135	133	126	128	125	134	136	136
	123	130	136	127	132	119	129	133	130	133
	126	126	119	124	126	125	128	136	128	128

Вариант 12	140	131	131	142	131	131	138	131	131	139
	124	139	131	136	133	132	131	144	141	136
	134	136	139	138	140	131	139	139	150	135
	137	134	138	137	131	138	134	135	138	137
	144	137	139	127	140	134	131	137	135	146
	140	134	132	134	141	127	134	146	123	137
	131	140	141	139	132	134	130	139	141	143
	129	136	142	133	138	123	135	138	136	138
	132	132	126	130	133	130	134	142	134	134

Вариант 13	147	138	138	150	138	138	144	138	139	146
	131	144	139	143	139	129	137	151	149	144
	142	143	144	145	147	138	146	146	157	142
	143	140	146	144	138	145	141	142	144	141
	150	145	146	133	147	141	138	143	142	153
	144	140	139	141	147	133	140	153	130	144
	137	147	147	147	139	141	137	147	147	150
	136	144	151	140	145	128	141	145	143	144
	138	139	133	137	140	136	141	149	140	141

Вариант 14	155	145	144	157	145	145	151	144	147	154
	138	152	146	150	147	136	145	159	158	152
	150	151	151	152	155	146	154	155	164	151
	150	148	154	151	146	151	149	150	152	150
	157	153	154	140	155	148	146	151	149	160
	151	148	146	148	155	144	146	159	137	151
	144	155	154	155	146	148	144	155	154	158
	143	151	159	148	152	134	148	152	151	151
	145	147	141	145	147	143	149	156	148	148

Вариант 15	163	152	152	164	153	153	159	152	156	162
	145	160	155	158	155	144	152	167	165	160
	159	159	157	158	163	154	162	163	171	158
	157	155	161	159	154	159	157	158	160	158
	164	161	161	147	162	156	153	160	156	166
	157	155	154	155	162	151	152	167	145	158
	151	163	162	162	154	156	151	163	161	166
	151	159	167	156	161	140	157	159	159	157
	153	155	149	153	155	150	156	164	155	156

Вариант 16	170	160	159	172	161	162	166	160	164	169
	152	168	162	166	163	151	161	175	173	169
	166	167	164	166	171	162	170	171	178	167
	165	162	169	167	162	167	166	166	168	165
	171	169	170	154	171	165	161	168	164	174
	164	163	161	164	169	156	159	175	153	166
	153	171	169	170	161	164	158	171	169	174
	185	167	176	164	169	147	163	167	167	165
	159	163	157	161	164	158	164	171	163	164

Вариант 17	178	169	167	180	168	169	173	158	171	177
	160	176	170	173	170	159	168	183	181	177
	175	174	171	174	179	170	178	179	186	174
	172	171	177	175	170	175	174	174	175	173
	179	178	177	162	179	173	170	176	172	181
	173	171	169	172	178	174	168	182	161	173
	165	180	177	170	170	171	165	179	176	182
	166	175	183	172	177	154	170	174	175	173
	168	172	165	169	171	166	171	179	171	171

Вариант 18	186	176	175	180	176	179	181	176	180	185
	169	184	179	182	178	169	176	191	190	186
	183	182	179	181	187	178	185	187	194	183
	181	179	185	183	179	182	182	182	183	181
	187	187	186	171	187	182	177	184	180	189
	180	180	178	179	185	178	176	189	169	181
	174	187	185	186	178	181	174	188	184	190
	175	182	191	181	185	162	179	183	184	181
	176	179	172	177	180	174	179	187	178	180

Вариант 19	193	184	182	194	183	186	188	184	187	191
	176	192	186	189	186	175	183	198	197	194
	191	189	186	189	193	186	193	195	201	190
	187	185	192	191	186	190	189	190	190	188
	194	193	192	178	195	189	185	191	186	196
	187	187	184	187	192	182	183	196	177	189
	181	194	192	192	185	188	182	194	194	197
	183	190	198	188	193	169	186	190	191	189
	183	187	179	185	187	180	186	194	186	187

Вариант 20	200	192	189	202	191	194	196	192	196	198
	184	200	193	197	194	183	190	205	204	202
	198	195	194	196	201	193	200	203	208	197
	195	193	200	198	194	197	197	198	198	195
	201	201	199	186	202	197	194	198	194	203
	194	194	192	194	199	191	191	203	184	196
	189	201	200	199	193	196	190	202	199	204
	191	197	204	196	200	177	193	197	199	197
	191	195	187	193	195	188	194	200	193	195

Вариант 21	207	199	196	208	198	201	203	200	203	205
	193	206	200	204	200	190	198	212	211	209
	205	202	201	203	208	200	207	209	214	204
	202	200	206	205	202	204	205	205	204	201
	209	208	206	194	210	204	202	206	200	209
	202	202	200	201	206	198	199	209	192	203
	196	207	207	206	201	203	198	209	206	211
	198	204	211	203	207	185	201	205	206	205
	198	202	195	200	202	195	201	207	200	202

Учебное издание
Информационно-статистическая теория измерений
Методические указания
к лабораторно-практическому комплексу

Составители: ФЁДОРОВ Тимур Анисович
ФЕДОТОВ Леонид Викторович

Редактор Н. А. Евдокимова

Подписано в печать 30.08.2004. Формат 60×84/16
Бумага тип. №1. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 2,09
Уч.-изд. л. 2,00. Тираж 100 экз. Заказ .

Ульяновский государственный технический университет
Типография УлГТУ, 432027, г. Ульяновск, ул. Сев. Венец, д. 32